الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

صفحة:حمزة حميدي للرياضيات facebook

قواسم عدد طبيعي

a و b عددان طبيعيان حيث $b \neq 0$.
القول أن b قاسم للعدد a معناه يوجد عدد طبيعي q حيث: $a = b \times q$

ملاحظات:

1)كل الجمل الآتية لها نفس المعنى:

- b قاسم للعدد a
- b يقسم a
- a يقبل القسمة على b
- a مضاعف ل b

2) 1 قاسم لجميع الأعداد الطبيعية.

3) 0 مضاعف لجميع الأعداد الطبيعية.

4) كل عدد طبيعي غير معدوم يقبل القسمة على نفسه.

خواص قواسم عدد طبيعي

خاصية1:

a ، b و n أعداد طبيعية غير معدومة.

- إذا كان n يقسم كلا من a و b فإن n يقسم $a+b$ و $a-b$ $(a \geq b)$:
- إذا كان n يقسم a فإن n يقسم $k \times a$ حيث k عدد طبيعي.

مثال:

3 يقسم 9 ويقسم 27

إذن 3 يقسم 27+9 أي يقسم 36

و 3 يقسم 27-9 أي يقسم 18

خاصية2:

a ، b و n أعداد طبيعية غير معدومة حيث $a > b$.

- إذا كان n يقسم كلا من a و b فإن n يقسم باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b.

مثال:

5 يقسم 90 ويقسم 25 إذن 5 يقسم باقي القسمة الإقليدية للعدد 90 على 25

أي 5 يقسم 15

القاسم المشترك الأكبر (pgcd)

يسمى أكبر قاسم مشترك لعددين طبيعيين a و b القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين، ويرمز له بالرمز PGCD(a;b)

خواص

a و b عددان طبيعيان.

$PGCD(a;a) = a$ مثال: $PGCD(7;7) = 7$

$PGCD(a;0) = a$ مثال: $PGCD(3;0) = 3$

- إذا كان b قاسم للعدد a فإن:

$PGCD(a;b) = b$ مثال: $PGCD(6;2) = 2$

حساب القاسم المشترك الأكبر

الطريقة الأولى: استخراج قائمة القواسم المشتركة للعددين

مثال: حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 12 و 18

قواسم العدد 12 هي: 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 و 12

قواسم العدد 18 هي: 1 ، 2 ، 3 ، 6 ، 9 و 18

ومنه القواسم المشتركة للعددين 12و18

هي: 1 ، 2 ، 3 و 6

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 12و 18 هو: 6

$$PGCD(18;12) = 6$$

الطريقة الثانية: استعمال خوارزمية الفروق المتتابعة

مثال: حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 117 و 91

$$117 - 91 = 26$$
$$91 - 26 = 65$$
$$65 - 26 = 39$$
$$39 - 26 = 13$$
$$26 - 13 = \boxed{13}$$
$$13 - 13 = 0$$

إذن: $PGCD(117;91) = 13$

الطريقة الثالثة: استعمال خوارزمية إقليدس

مثال: حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 528 و 468

$$528 = 468 \times 1 + 60$$
$$468 = 60 \times 7 + 48$$
$$60 = 48 \times 7 + \boxed{12}$$
$$48 = 12 \times 4 + 0$$

إذن: $PGCD(528;468) = 12$

صفحة:حمزة حميدي للرياضيات facebook

العددان الأوليان فيما بينهما

العددان a و b أوليان فيما بينهما يعني أن قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 .

نكتب: $PGCD(a;b)=1$

مثال1:

قواسم العدد 14 هي: 1 ، 2 ، 7 و 14

قواسم العدد 15 هي: 1 ، 3 ، 5 و 15

ومنه القاسم المشترك الأكبر للعددين 14و 15 هو: 1

$$PGCD(14;15)=1$$

إذن العددان 14 و 15 أوليان فيما بينهما

مثال2:

هل العددان 120 و 725 أوليان فيما بينهما؟ دون حساب القاسم المشترك الأكبر.

العددان 120 و 725 يقبلان القسمة على 5 لأن:

- العدد 120 يقبل القسمة على 5 لأن رقم احاده 0
- العدد 725 يقبل القسمة على 5 لأن رقم احاده 5

ومنه: $PGCD(120;725)\neq 1$

إذن: العددان 120 و 725 ليسا أوليان فيما بينهما

الكسور غير القابلة للاختزال

الكسر غير القابل للاختزال هو الكسر الذي بسطه ومقامه اوليان فيما بينهما.

لكتابة كسر على شكل كسر غير قابل للاختزال نقسم بسطه ومقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما.

مثال1:

الكسر $\frac{15}{14}$ غير قابل للختزال لأن القاسم المشترك الأكبر للعددين 15 و 14 هو : 1

مثال2:

كتابة الكسر $\frac{91}{117}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال

لدينا مما سبق: $PGCD(117;91)=13$

ومنه: $\frac{91}{117}=\frac{91\div 13}{117\div 13}=\frac{7}{9}$

تمرين

أراد العم أحمد تبليط غرفة مستطيلة الشكل، طولها 780cm وعرضها 450cm ببلاط مربع الشكل. اتصل العم أحمد بصاحب مصنع للبلاط فأخبره هذا الأخير أنه يوجد آلة خاصة بتقطيع البلاط إلى مربعات متقايسة حسب الحاجة.

يريد العم أحمد حساب عدد البلاط اللازم لتبليط كل الغرفة وهذا بشراء أقل عدد ممكن من البلاط.

-ساعد العم أحمد في معرفة عدد البلاط اللازم شراءه.

الحل

أ- حساب طول ضلع البلاطة الواحدة:(نحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 780 و 450)

$$780=450\times 1+330$$
$$450=330\times 1+120$$
$$330=120\times 2+90$$
$$120=90\times 1+\boxed{30}$$
$$30=30\times 3+0$$

ومنه: $PGCD(780;450)=30$

إذن طول ضلع كل بلاطة هو: $30cm$

ب- حساب عدد البلاط اللازم شراءه:

- حساب مساحة الغرفة:

$$A_1=780\times 450$$
$$A_1=351000$$

- حساب مساحة البلاطة الواحدة:

$$A_2=30\times 30$$
$$A_2=900$$

ومنه: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{351000}{900}=390$

إذن عدد البلاط اللازم شراءه هو: 390 بلاطة

facebook
صفحة: حمزة حميدي للرياضيات

تعريف

a عدد موجب.
الجذر التربيعي للعدد a هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي a.

نرمز للجذر التربيعي للعدد a بالرمز $\sqrt{a}$.
ونقرأ: "الجذر التربيعي لـ a" أو "جذر a"

خواص: a عدد موجب.

$$\sqrt{a^2} = a \quad ; \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

ملاحظة

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$$
$$(-\sqrt{a}) \times (-\sqrt{a}) = (-\sqrt{a})^2 = a$$

أمثلة:

$$\sqrt{3^2} = 3 \; ; \; (\sqrt{7})^2 = 7 \; ; \; \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$$

الأعداد الناطقة والأعداد غير الناطقة

a عدد ناطق موجب.
- في حالة a مربعا لعدد ناطق، يكون $\sqrt{a}$ عددا ناطقا.
- في حالة a ليس مربعا لعدد ناطق، فإن $\sqrt{a}$ ليس عددا ناطقا.

أمثلة:
- نعلم أنه لا يوجد عدد ناطق مربعه 6. إذن $\sqrt{6}$ عدد غير ناطق
- نعلم أنه يوجد عدد ناطق مربعه 9 وهو 3 $3^2 = 9$. إذن $\sqrt{9}$ عدد ناطق

$\sqrt{16}$ عدد ناطق ، $\sqrt{36}$ عدد ناطق ، $\sqrt{81}$ عدد ناطق
$\sqrt{7}$ عدد غير ناطق ، $\sqrt{19}$ عدد غير ناطق ، $\sqrt{33}$ عدد غير ناطق

العمليات على الجذور التربيعية

خاصية: من أجل كل عددين موجبين a و b

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

ملاحظة

$$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$$

أمثلة:

$$\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt{15}$$
$$\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$$
$$\sqrt{22} = \sqrt{11 \times 2} = \sqrt{11} \times \sqrt{2}$$
$$\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{3^2 \times 7} = 3\sqrt{7}$$
$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

خاصية2: من أجل كل عددين موجبين a و b حيث $b \neq 0$.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

أمثلة:

$$\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{40}{5}} = \sqrt{8} \quad ; \quad \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$$

ملاحظة2:

في حالة $a < 0$ و $b < 0$ فإن $\sqrt{a \times b}$ و $\sqrt{\frac{a}{b}}$ موجودين مع أن كل من $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ لا معنى لهما.

أمثلة:
- $\sqrt{(-9) \times (-4)} = \sqrt{36} = 6$
- $\sqrt{\frac{-32}{-2}} = \sqrt{16} = 4$

ملاحظة3:

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$; $a > 0$; $b > 0$
- $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$; $b > 0$; $a > b$

مثال: $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$
لأن: $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$
$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

حل معادلة من الشكل $x^2 = b$

b عدد كيفي.

- إذا كان $b > 0$ فإن المعادلة $x^2 = b$ تقبل حلين متعاكسين هما: $\sqrt{b}$ و $-\sqrt{b}$.
- إذا كان $b = 0$ فإن المعادلة $x^2 = 0$ تقبل حلا واحد وهو العدد 0.
- إذا كان $b < 0$ فإن المعادلة $x^2 = b$ لا تقبل أي حل.

أمثلة:

- $x^2 = 15$ معناه: $x = \sqrt{15}$ أو $x = -\sqrt{15}$
ومنه للمعادلة حلين هما: $\sqrt{15}$ و $-\sqrt{15}$.
- $x^2 = 0$
للمعادلة حل واحد وهو 0.
- $x^2 = -16$
المعادلة لا تقبل أي حل.

نسبة مقامها عدد غير ناطق

a عدد كيفي ؛ b عدد ناطق موجب تماما.

لجعل مقام النسبة $\frac{a}{\sqrt{b}}$ عددا ناطقا، نضرب كلا من البسط والمقام في نفس العدد $\sqrt{b}$.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

أمثلة:

- $\frac{11}{\sqrt{3}} = \frac{11 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}}{3}$
- $\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{7}}{3\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{35}}{3 \times 7} = \frac{\sqrt{35}}{21}$
- $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{14}}{7}$
- $\frac{6+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(6+\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}+2}{2}$
$= \frac{2(3\sqrt{2}+1)}{2} = 3\sqrt{2}+1$

تبسيط عبارة تتضمن جذور

تبسيط عبارة تتضمن جذورا هو كتابتها على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a عدد صحيح و b أصغر عدد طبيعي ممكن.

x ، y ، z أعداد صحيحة، b عدد طبيعي.
لتبسيط العبارة: $x\sqrt{b} + y\sqrt{b} + z\sqrt{b}$
نطبق الخاصية التوزيعية:

$$x\sqrt{b} + y\sqrt{b} + z\sqrt{b} = (x+y+z)\sqrt{b}$$

مثال1:

$$8\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = (8-3+1)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

مثال2: كتابة العبارة A على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a عدد صحيح و b أصغر عدد طبيعي ممكن:

$$A = 7\sqrt{50} + \sqrt{18} - 3\sqrt{8}$$
$$A = 7\sqrt{25 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} - 3\sqrt{4 \times 2}$$
$$A = 7\sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{3^2 \times 2} - 4\sqrt{2^2 \times 2}$$
$$A = 35\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$$
$$A = (35+3-8)\sqrt{2}$$
$$\boxed{A = 30\sqrt{2}}$$

مثال2: كتابة العبارة B على الشكل $a\sqrt{5}$ حيث a عدد صحيح:

$$B = 2\sqrt{45} - 3\sqrt{180} - \sqrt{605}$$
$$B = 2\sqrt{9 \times 5} - 3\sqrt{36 \times 5} - \sqrt{121 \times 5}$$
$$B = 2\sqrt{3^2 \times 5} - 3\sqrt{6^2 \times 5} - \sqrt{11^2 \times 5}$$
$$B = 6\sqrt{5} - 18\sqrt{5} - 11\sqrt{5}$$
$$B = (6-18-11)\sqrt{5}$$
$$\boxed{B = -23\sqrt{5}}$$

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات
facebook

تذكير قواعد الحساب على قوة عدد نسبي

a و b عددان غير معدومين ؛ m و n عددان نسبيان صحيحان

القاعدة	مثال
$a^0 = 1$	$7^0 = 1$
$a^1 = a$	$6^1 = 6$
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$3^7 \times 3^6 = 3^{7+6} = 3^{13}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{6^{13}}{6^4} = 6^{13-4} = 6^9$
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$(2^4)^3 = 2^{4 \times 3} = 2^{12}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$
$(a \times b)^m = a^m \times b^m$	$(3 \times 5)^2 = 3^2 \times 5^2$
$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

خـــاصية طـــالـــس

خـــاصية طالـــس

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات facebook

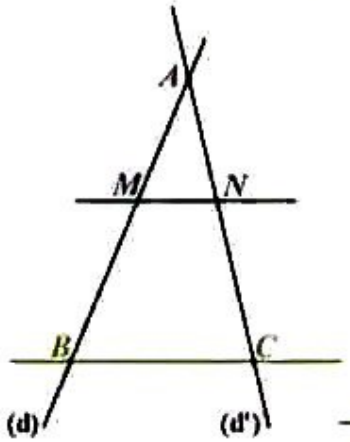
(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في النقطة A

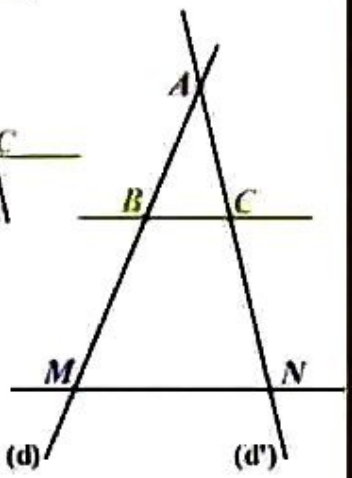
B و M نقطتان من (d) تختلفان عن A.

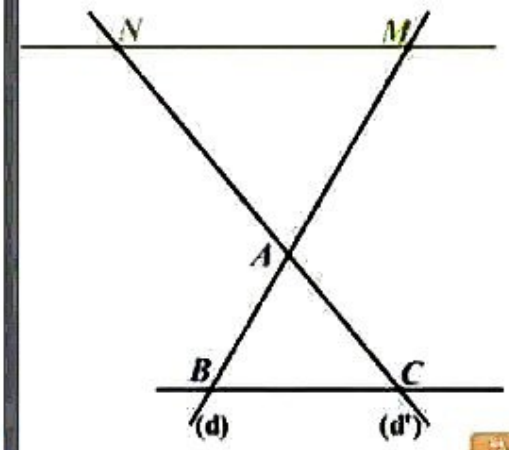
C و N نقطتان من (d') تختلفان عن A.

إذا كان (MN) و (BC) متوازيين فإن:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$







ملاحظة

تسمح خاصية طالس بحساب الأطوال والنسب وإثبات عدم توازي مستقيمين.

الخاصية العكسية

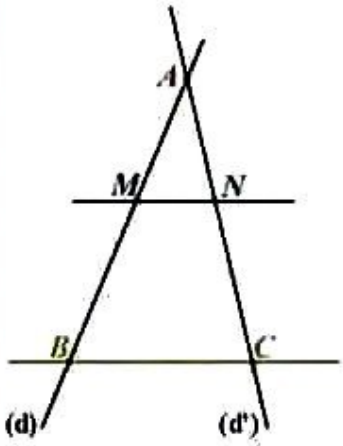
(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في النقطة A

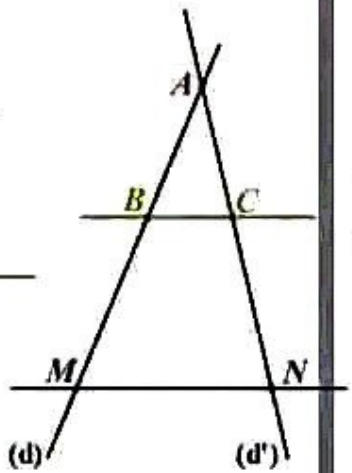
B و M نقطتان من (d) تختلفان عن A.

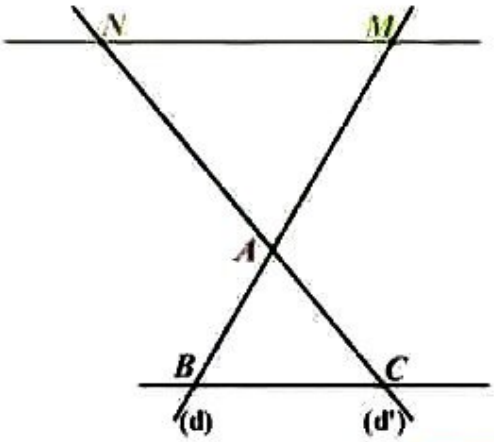
C و N نقطتان من (d') تختلفان عن A.

إذا كان $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ وكانت النقط A، B، M والنقط A، C، N مرتبة بنفس الترتيب فإن $(MN)//(BC)$ حسب الخاصية العكسية لخاصية طالس

يمكن ترجمة هذه الخاصية بإحدى الوضعيات التالية:







ملاحظة

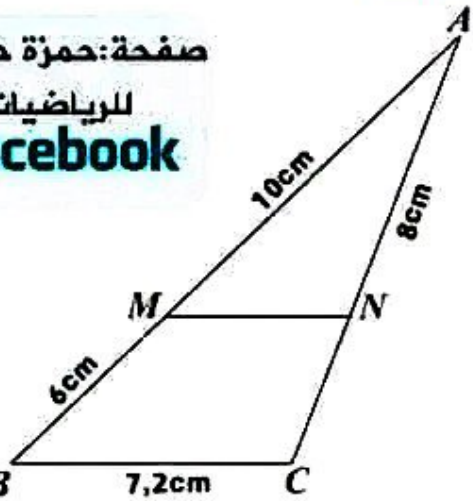
تسمح خاصية طالس العكسية بإثبات توازي مستقيمين.

خـــاصية طـــالـــس

حساب الأطوال والنسب

مثال 1: لاحظ الشكل الآتي حيث: $(MN)//(BC)$

صفحة: حمزة حميدي
للرياضيات
facebook



- أُحسب الطول AC. ؛ - أُحسب النسبة $\frac{AM}{MN}$.

- حساب الطول AC:

لدينا:

المستقيمان (MN) و (CD) متوازيان والنقط A ، M ، B في استقامية وكذلك النقط A ، N ، C في استقامية

وعليه حسب خاصية طالس نجد:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

بالتعويض: $\frac{10}{10+6}=\frac{8}{AC}=\frac{MN}{BC}$

نأخذ: $\frac{10}{16}=\frac{8}{AC}$

ومنه: $AC=\frac{16\times 8}{10}$

إذن: $AC=12{,}8cm$

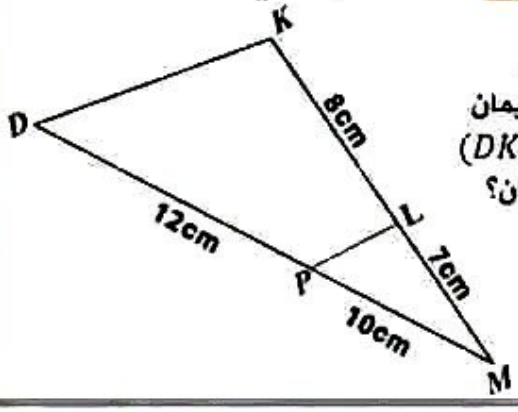
- حساب النسبة $\frac{AM}{MN}$:

لدينا: $\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$ ومنه: $\frac{AM}{MN}=\frac{AB}{BC}$

إذن: $\frac{AM}{AN}=\frac{16}{7{,}2}$

إثبات عدم التوازي

مثال 2: لاحظ الشكل التالي:



هل المستقيمان (LP) و (DK) متوازيان؟

- تبيان إن كان المستقيمان (LP) و (DK) متوازيان:

لدينا:

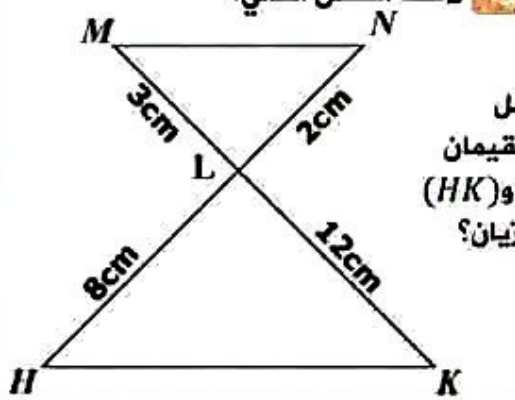
$$\frac{MP}{MD}=\frac{10}{10+12}=\frac{10}{22}=\frac{5}{11} \quad \text{و} \quad \frac{ML}{MK}=\frac{7}{7+8}=\frac{7}{15}$$

ومنه: $11\times 7=77$ و $5\times 15=75$

بما أن $\frac{MP}{MD}\neq\frac{ML}{MK}$ فإن المستقيمان (LP) و (DK) غير متوازيين حسب خاصية طالس.

إثبات التوازي

مثال 3: لاحظ الشكل التالي:



هل المستقيمان (MN) و (HK) متوازيان؟

- تبيان إن كان المستقيمان (MN) و (HK) متوازيان:

لدينا:

$$\frac{LN}{LH}=\frac{2}{8}=0{,}25 \quad \text{و} \quad \frac{LM}{LK}=\frac{3}{12}=0{,}25$$

وعليه: $\frac{LN}{LH}=\frac{LM}{LK}$

وبما أن النقط M ، L ، K والنقط N ، L ، H في استقامية وبنفس الترتيب فإن $(MN)//(HK)$ حسب الخاصية العكسية لخاصية طالس.

خاصية طاليس

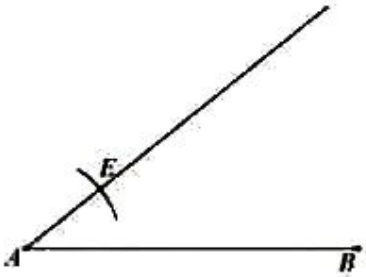
إنشاءات هندسية بسيطة

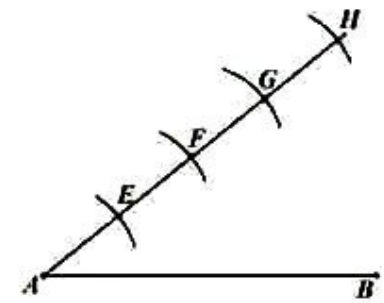
تقسيم قطعة مستقيم

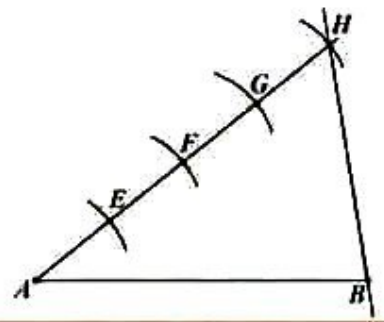
لتقسيم قطعة مستقيم $[AB]$ إلى n قطعة كلها متقايسة (nعدد طبيعي أكبر تماما من الواحد) نتبع المثال التالي:

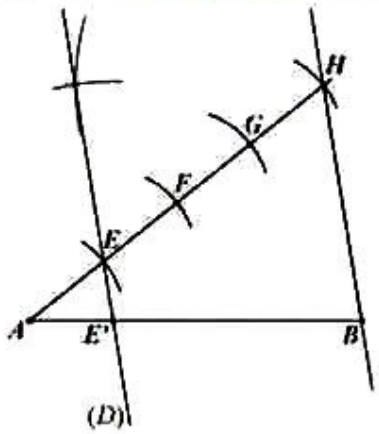
مثال تقسيم قطعة المستقيم $[AB]$ إلى أربع قطع متقايسة:

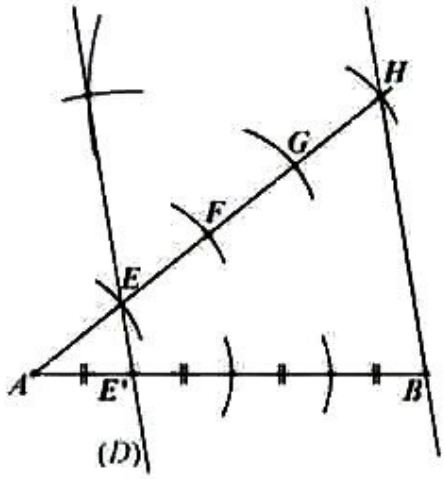
- ننشئ نصف مستقيم مبدؤه A وحامله يختلف عن المستقيم (AB).
- على نصف المستقيم ننشئ بالمدور نقطة E.
- نقوم بإنشاء النقط F و G و H بنفس فتحة المدور.
- نرسم المستقيم (BH).
- ننشئ المستقيم (D) المستقيم المار من E والموازي للمستقيم (BH) (بالمدور أو بالكوس).
- نسمي E' نقطة تقاطع (D) و (AB).
- نقسم القطعة $[AB]$ إلى قطع متقايسة طولها AE' باستعمال المدور.









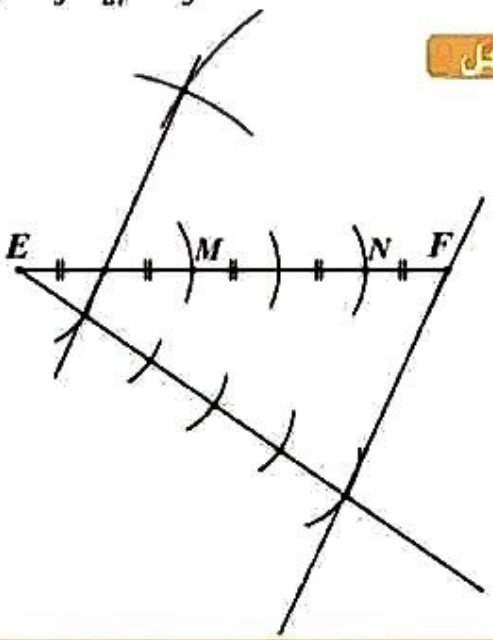


تمرين

$[EF]$ قطعة مستقيم طولها 6cm .

- ارسم قطعة المستقيم $[EF]$ ثم قم بتقسيمها إلى خمس قطع متقايسة.
- عين النقطتين M و N حيث: $\frac{EM}{EF}=\frac{2}{5}$ و $\frac{EN}{EF}=\frac{4}{5}$.

الحل



صفحة حمزة حميدي للرياضيات facebook

النسب المثلثية

نوظف النسب المثلثية في المثلث القائم لـ:

- حساب قيس زاوية حادة
- حساب النسب
- حساب طول ضلع
- انشاء زاوية حادة

جيب تمام زاوية حادة

جيب تمام (cos) زاوية حادة يساوي النسبة:

$$\frac{\text{طول الضلع المجاور لهذه الزاوية}}{\text{طول الوتر}}$$

جيب زاوية حادة

جيب (sin) زاوية حادة يساوي النسبة:

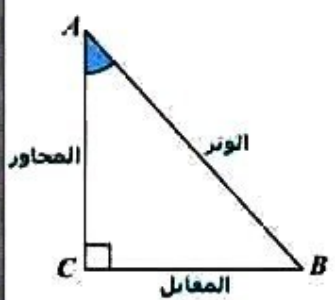
$$\frac{\text{طول الضلع المقابل لهذه الزاوية}}{\text{طول الوتر}}$$

ظل زاوية حادة

ظل (tan) زاوية حادة يساوي النسبة:

$$\frac{\text{طول الضلع المقابل لهذه الزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور لهذه الزاوية}}$$

مثال 1: ABC مثلث قائم في C

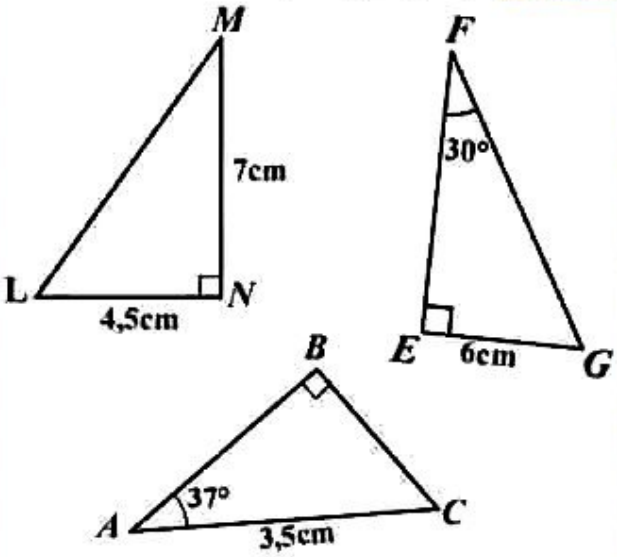


في المثلث ABC القائم في C لدينا:

$$\cos\hat{A} = \frac{AC}{AB} \qquad \sin\hat{A} = \frac{BC}{AB} \qquad \tan\hat{A} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{BC}{AB} \qquad \sin\hat{B} = \frac{AC}{AB} \qquad \tan\hat{B} = \frac{AC}{BC}$$

تمرين 1: اليك الأشكال التالية:



1- أحسب قيس الزاوية $\hat{L}$. (بالتدوير إلى الوحدة).

2- أحسب الطول FG.

3- أحسب الطول AB ، بالتدوير إلى الوحدة.

الحل

1- حساب قيس الزاوية $\hat{L}$:

في المثلث LMN القائم في N لدينا:

$$\tan\hat{L} = \frac{MN}{LM} = \frac{7}{4,5}$$

$$\tan\hat{L} \approx 1,5555$$

باستعمال الالة الحاسبة وبالتدوير إلى الوحدة نجد:

$$\boxed{\hat{L} \approx 57°}$$

2- حساب الطول FG :

في المثلث EFG القائم في E لدينا:

$\sin\hat{F} = \frac{EG}{FG}$ بالتعويض: $\sin 30° = \frac{6}{FG}$

ومنه: $FG = \frac{6}{\sin 30°}$ إذن: $\boxed{FG = 12cm}$

3- حساب الطول AB :

في المثلث ABC القائم في B لدينا:

$\cos\hat{A} = \frac{AB}{AC}$ بالتعويض: $\cos 37° = \frac{AB}{3,5}$

ومنه: $AB = \cos 37° \times 3,5$ إذن: $\boxed{AB \approx 2,8cm}$

النسب المثلثية

التمرين 3

أنشئ زاوية قيسها α حيث: $sin\alpha = 0,8$

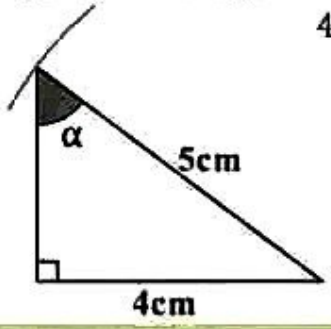
الحل

نضع وحدة الطول هي $1cm$

لدينا: $sin\alpha = 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

- البسط 4 يمثل طول الضلع المقابل للزاوية α
- المقام 5 يمثل طول الوتر

ننشئ مثلثا قائما طول وتره $5cm$ وطول أحد ضلعيه القائمين $4cm$



العلاقات المثلثية

من أجل كل x زاوية حادة في مثلث قائم لدينا:

$$\boxed{sin^2x + cos^2x = 1}$$

$$\boxed{tanx = \frac{sinx}{cosx}}$$

التمرين 1

x هو قيس زاوية حادة حيث: $cosx = \frac{1}{2}$

1- أحسب دون استعمال الآلة الحاسبة، القيمة المضبوطة للعدد $sinx$.

2- استنتج القيمة المضبوطة للعدد $tanx$.

الحل

1- حساب القيمة المضبوطة للعدد $sinx$.

لدينا: $sin^2x + cos^2x = 1$

ومنه: $sin^2x = 1 - cos^2x$

$$sin^2x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$sin^2x = 1 - \frac{1}{4}$$

$$sin^2x = \frac{4}{4} - \frac{1}{4}$$

$$sin^2x = \frac{3}{4}$$

$$sinx = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\boxed{sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

2- استنتاج القيمة المضبوطة للعدد $tanx$

لدينا: $tanx = \frac{sinx}{cosx}$

ومنه:

$$tanx = \frac{sinx}{cosx} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

التمرين 2

1- أحسب $cos\hat{c}$ علما أن:

$$tan\hat{c} = \frac{3}{2} \quad \text{و} \quad sin\hat{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

الحل

- حساب $cos\hat{c}$:

لدينا: $tan\hat{c} = \frac{sin\hat{c}}{cos\hat{c}}$

ومنه: $cos\hat{c} = \frac{sin\hat{c}}{tan\hat{c}}$

بالتعويض: $cos\hat{c} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}}$

وبالتالي: $cos\hat{c} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{3}$

إذن: $cos\hat{c} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

خـــاصـــية فيـــثاغـــورس

خاصية فيثاغورس

facebook صفحة:حمزة حميدي للرياضيات

إذا كان مثلث قائماً، فإن مربع طول وتره يساوي مجموع مربعي طولي ضلعيه الآخرين.

ملاحظة1

تسمح خاصية فيثاغورس بحساب طول ضلع في مثلث قائم بمعلومية طُولي الضلعين الآخرين.

مثال1

ABC مثلث قائم في A حيث: $AB = 4cm$ ، $AC = 3cm$

-حساب الطول BC

المثلث ABC قائم في A، وحسب خاصية فيثاغورس نجد:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ بالتعويض: $BC^2 = 4^2 + 3^2$ ومنه: $BC^2 = 16 + 9$

ومنه: $BC^2 = 25$ ومنه: $BC = \sqrt{25}$ إذن: $\boxed{BC = 5cm}$

ملاحظة2

إذا كان في مثلث مربع أطول أضلاعه لا يساوي مجموع مربعي ضلعيه الآخرين فإن هذا المثلث ليس قائما حسب خاصية فيثاغورس.

مثال2

LMN مثلث حيث: $LM = 5cm$ ، $LN = 6cm$ ، $MN = 7cm$

-نريد معرفة إن كان المثلث LMN قائماً:

لدينا: $MN^2 = 7^2 = 49$ و $LM^2 + LN^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$

بما أن: $LM^2 + LN^2 \neq MN^2$ فإن المثلث LMN ليس قائماً حسب خاصية فيثاغورس.

الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورس

إذا كان في مثلث مربع طول أحد الأضلاع مساويا لمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن هذا المثلث قائم.

ملاحظة

تسمح الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورس بإثبات أن مثلثاً عُلمت أطوال أضلاعه الثلاثة قائم.

مثال

EFG مثلث حيث: $EF = 6cm$ ، $EG = 8cm$ ، $FG = 10cm$

-تبيان طبيعة المثلث EFG:

لدينا: $FG^2 = 10^2 = 100$ و $EF^2 + EG^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

بما أن: $EF^2 + EG^2 = FG^2$

فإن المثلث EFG قائم في E حسب الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورس

a، b، c، وd أعداد

قاعدة حذف الأقواس في مجموع جبري

عند حذف قوسين مسبوقين بإشارة + لا نغير إشارات الحدود داخل القوسين.

$$a+(b+c)=a+b+c$$

$$a+(b-c)=a+b-c$$

أمثلة:

$$5x+(2x+4)=5x+2x+4$$

$$4+(3x-7)=4+3x-7$$

عند حذف قوسين مسبوقين بإشارة - نغير إشارات الحدود داخل القوسين.

$$a-(b+c)=a-b-c$$

$$a-(b-c)=a-b+c$$

أمثلة:

$$4x-(5+2x)=4x-5-2x$$

$$6x^2-(3x-1)=6x^2-3x+1$$

تبسيط عبارة جبرية

تبسيط عبارة جبرية يعني كتابتها بأقل عدد ممكن من الحدود في حالة المجموع أو العوامل في حالة الجداء.

أمثلة:

$$A=2x+7-5x+1$$
$$A=2x-5x+7+1$$
$$A=-3x+8$$

$$B=-7x^2-15x-9+3x^2+1$$
$$B=-7x^2+3x^2-15x-9+1$$
$$B=-4x^2-15x-8$$

$$C=6x\times 2\times 5x$$
$$C=60x^2$$

نشر عبارة جبرية

نشر عبارة جبرية يعني تحويلها من جداء عاملين إلى مجموع جبري.

لنشر عبارة جبرية نستعمل الخاصية التوزيعية أو المتطابقات الشهيرة.

الخاصية التوزيعية

توزيع الضرب على الجمع:

$$k(a+b)=ka+kb$$

توزيع الضرب على الطرح:

$$k(a-b)=ka-kb$$

التوزيع المضاعف:

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

أمثلة:

- $3(2x+5)=6x+15$
- $-4x(3x+1)=-12x^2-4x$
- $(2x+1)(3x+2)=6x^2+4x+3x+2$
  $=6x^2+7x+2$

المتطابقات الشهيرة

مربع مجموع:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

مربع فرق:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

جداء مجموع حدين وفرقهما:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

أمثلة:

- $(2x+5)^2=(2x)^2+2\times 2x\times 5+5^2$
  $=4x^2+20x+20$
- $(4x-3)^2=(4x)^2-2\times 4x\times 3+3^2$
  $=16x^2-24x+9$
- $(3x+1)(3x-1)=(3x)^2-1^2$
  $=9x^2-1$

صفحة:حمزة حميدي للرياضيات facebook

تحليل عبارة جبرية

تحليل عبارة جبرية يعني تحويلها من مجموع جبري إلى جداء عاملين.

لتحليل عبارة جبرية يمكننا البحث عن العامل المشترك أو توظيف المتطابقات الشهيرة.

البحث عن العامل المشترك

نبحث عن العامل المشترك ثم نطبق احدى القاعدتين التاليتين:

$$\boxed{ka + kb = k(a+b)}$$

$$\boxed{ka - kb = k(a-b)}$$

أمثلة:

$$A = 7x + 7y$$
$$A = 7(x+y)$$

$$B = 3x^2 + 2x$$
$$B = x(3x+2)$$

$$C = 3x(x+2) - 15x$$
$$C = 3x(x+2) - 3x \times 5$$
$$C = 3x(x+2-5)$$
$$C = 3x(x-3)$$

$$D = (3x+5)(7x+2) - (7x+2)^2$$
$$D = (3x+5)(7x+2) - (7x+2)(7x+2)$$
$$D = (7x+2)[(3x+5) - (7x+2)]$$
$$D = (7x+2)(3x+5-7x-2)$$
$$D = (7x+2)(-4x+3)$$

توظيف المتطابقات الشهيرة

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2}$$

$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2}$$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

أمثلة:

$$E = 4x^2 + 12x + 9$$
$$E = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2$$
$$E = (2x+3)^2$$

$$F = 9x^2 - 30x + 25$$
$$F = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$$
$$F = (3x-5)^2$$

$$G = 16x^2 - 25$$
$$G = (4x)^2 - (5)^2$$
$$G = (4x+5)(4x-5)$$

المعادلات والمتراجحات

المعادلة من الدرجة الأولى

يؤول حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إلى حل معادلة من الشكل $ax = b$ حيث $a \neq 0$

الحل الوحيد لهذه المعادلة هو العدد $\frac{b}{a}$

مثال: حل المعادلة التالية:

$$3x - 1 = 7x - 9$$
$$3x - 7x = -9 + 1$$
$$-4x = -8$$
$$x = \frac{-8}{-4}$$
$$x = 2$$

معادلة الجداء المعدوم

- كل معادلة من الشكل $(ax+b)(cx+d) = 0$ حيث a، b، c، وd أعداد معلومة، تسمى معادلة الجداء المعدوم.
- حلول المعادلة: $(ax+b)(cx+d) = 0$ هي حلول المعادلتين: $ax + b = 0$ و $cx + d = 0$

مثال: حل المعادلة التالية:

$$(3x-1)(2x+6) = 0$$

$3x - 1 = 0$ أو $2x + 6 = 0$

$3x = 1$ أو $2x = -6$

$x = \frac{1}{3}$ أو $x = -3$

ومنه للمعادلة حلان هما: 3- و $\frac{1}{3}$

صفحة:حمزة حميدي للرياضيات facebook

المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

- المتراجحة بمجهول x هي متباينة قد تكون صحيحة وقد تكون خاطئة وهذا حسب قيم x.
- قيم x التي من أجلها تكون المتباينة صحيحة هي حلول المتراجحة.
- حل متراجحة هو إيجاد كل حلولها.

طريقة:

لحل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد نستعمل القواعد الآتية:

- نُحافظ على اتجاه المتراجحة عندما نضيف (أو نطرح من) طرفيها نفس العدد.
- نُحافظ على نفس اتجاه المتراجحة عندما نضرب طرفيها في (أو نقسم طرفيها على) نفس العدد الموجب تماما.
- نُغير اتجاه المتراجحة عندما نضرب طرفيها في (أو نقسم طرفيها على) العدد السالب تماما.

التمثيل البياني لحلول متراجحة

تُمثل حلول متراجحة على مستقيم عددي مُدرّج.

أمثلة: حُل المتراجحتين التاليتين ثم مثّل حلولهما بيانيا

المتراجحة 1 $9x^2 - 16 \geq 9x^2 + 7x + 5$

$9x^2 - 9x^2 - 7x \geq 5 + 16$

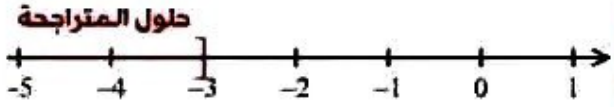
$-7x \geq 21$

$\frac{-7x}{-7} \leq \frac{21}{-7}$

$x \leq -3$

حلول المتراجحة هي كل قيم الأصغر من أو تساوي 3-

التمثيل البياني لحلول المتراجحة السابقة:



المتراجحة 2 $-3x - 3 > -7x + 5$

$-3x + 7x > 5 + 3$

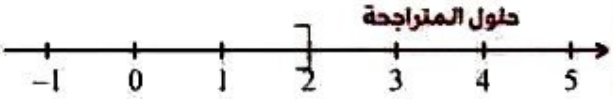
$4x > 8$

$\frac{4x}{4} > \frac{8}{4}$

$x > 2$

حلول المتراجحة هي كل قيم الأكبر تماما من 2

التمثيل البياني لحلول المتراجحة السابقة:



تمرين

1- انشر ثم بسط العبارة A حيث:

$A = (5x - 3)^2 - 2(x - 7)$

2- حلّل العبارة B حيث:

$B = (6x - 4)(8x - 3) - (6x - 4)$

3- حُل المعادلة: $(-5x - 1)(4 - 2x) = 0$

الحل

1- نشر و تبسيط العبارة A :

$A = (5x - 3)^2 - 2(x - 7)$
$A = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 3 + 3^2 - 2x + 14$
$A = 25x^2 - 30x + 9 - 2x + 14$
$A = 25x^2 - 32x + 23$

2- تحليل العبارة B :

$B = (6x - 4)(8x - 3) - (6x - 4)$
$B = (6x - 4)(8x - 3) - (6x - 4) \times 1$
$B = (6x - 4)[(8x - 3) - 1]$
$B = (6x - 4)(8x - 3 - 1)$
$B = (6x - 4)(8x - 4)$

3- حل المعادلة:

$(-5x - 1)(4 - 2x) = 0$ معناه:

$-5x - 1 = 0$ أو $4 - 2x = 0$

$-5x = 1$ أو $-2x = -4$

$x = -\frac{1}{5}$ أو $x = 2$

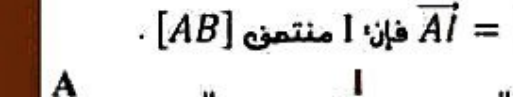
ومنه للمعادلة حلان هما: 2 و $-\frac{1}{5}$

الأشعة والانسحاب

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات facebook

الانسحاب ومفهوم الشعاع

A و B نقطتان متمايزتان. الانسحاب الذي يحول A إلى B يعرف شعاعا نرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$ (مبدؤه A ونهايته B)



مميزاته:

المنحى: منحاه هو منحى المستقيم (AB).

الاتجاه: اتجاهه هو من A نحو B.

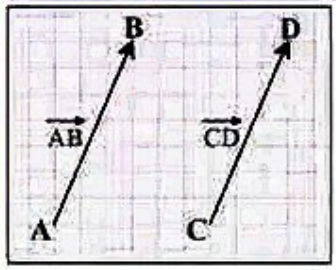
الطويلة: طويلته هي طول القطعة $[AB]$.

(يمكن أن نرمز لهذا الشعاع بالرمز $\vec{u}$ مثلا)

الشعاعان المتساويان

القول عن شعاعين أنهما متساويان يعني أن لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه ونفس الطول.

مثال:



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

معناه:

- للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ نفس المنحى، نفس الاتجاه ونفس الطول.
- الانسحاب الذي يحول A إلى B يحول أيضا C إلى D.

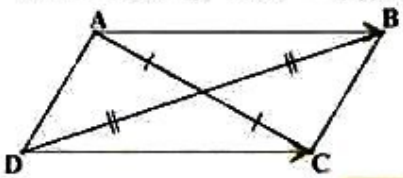
الشعاعان المتساويان ومتوازي الأضلاع

خاصية: A ، B ، C و D أربع نقط كل ثلاثة منها ليست في استقامة.

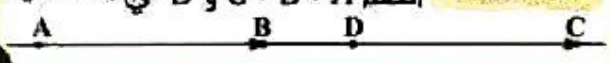
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ معناه الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

ملاحظة: A ، B ، C و D أربع نقط

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ معناه للقطعتين $[AC]$ و $[BD]$ نفس المنتصف.
- إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فإن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$



حالة خاصة: النقط A ، B ، C و D في استقامية



الشعاعان المتساويان ومفهوم منتصف قطعة

خاصية:

A ، B و I ثلاث نقط.

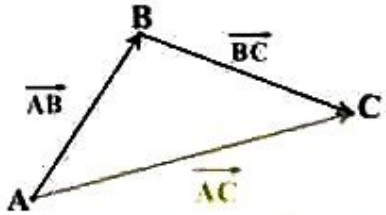
- اذا كان I منتصف $[AB]$ فإن: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- اذا كان $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ فإن: I منتصف $[AB]$.

مجموع شعاعين (علاقة شال)

A ، B و C ثلاث نقط.

مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AC}$

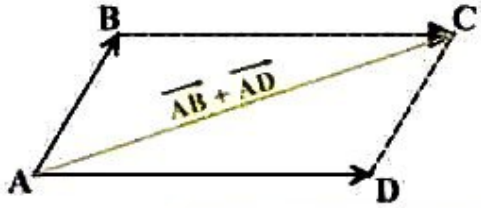
نكتب: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



قاعدة متوازي الأضلاع (مجموع شعاعين)

A ، B و C ثلاث نقط ليست على استقامية.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ معناه $ABCD$ متوازي أضلاع.



الشعاعان المتعاكسان

الشعاعان المتعاكسان هما شعاعان لهما نفس المنحى ونفس الطول ويختلفان في الاتجاه.

نقول أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متعاكسان

ونكتب $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

مجموع شعاعين متعاكسين يساوي الشعاع المعدوم

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

مثال:

الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعاكسان ونكتب $\vec{u} = -\vec{v}$.

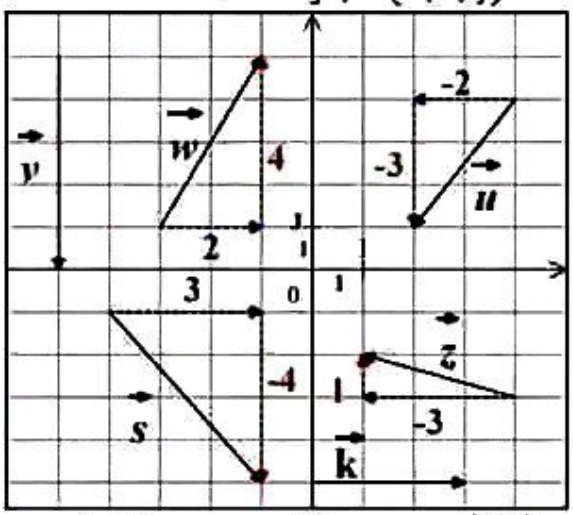
صفحة: حمزة حميدي للرياضيات facebook

قراءة مركبتي شعاع

نقرأ مركبتي شعاع بالإزاحتين المتتاليتين اللتين تسمحان بالمرور من مبدأ الشعاع إلى نهايته.

- الإزاحة الأولى تكون بالتوازي مع محور الفواصل وتكون موجبة عندما ننتقل نحو اليمين، وسالبة عندما ننتقل نحو اليسار.
- الإزاحة الثانية تكون بالتوازي مع محور التراتيب وتكون موجبة عندما ننتقل نحو الأعلى، وسالبة عندما ننتقل نحو الأسفل.

مثال: المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; I; J)$. مبدؤه النقطة O



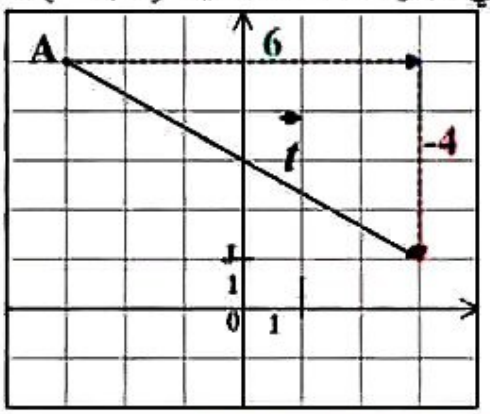
$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$; $\vec{s}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{z}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{k}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$

تمثيل مركبتي شعاع

لتمثيل شعاع علمت مركبتاه $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ، نختار نقطة كمبدأ لهذا الممثل ثم نحولها بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ فنحصل على نقطة نحولها بدورها بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$ للحصول على نهاية الشعاع المعطى.

مثال: لنمثل الشعاع $\vec{t}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ الذي مبدؤه النقطة A حيث $A(-3;5)$



الشعاعان المتساويان

الشعاعان المتساويان هما شعاعان لهما نفس المركبتين.

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ شعاعان

$\vec{u}=\vec{v}$ معناه: $x=x'$ و $y=y'$

مثال: لتكن النقط A . B . C و D حيث:

$A(-4;-1)$. $B(3;-1)$. $C(-3;2)$

و $D(4;2)$

- هل الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متساويان؟ $(\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD})$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-4)\\-1-(-1)\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D-x_C\\y_D-y_C\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4-(-3)\\2-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المركبتين

إذن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$